Etude de fonctions et problèmes

Vérifier les acquis n°1 à 8 p 38

I. La fonction racine carrée

A. Définition

Définition

La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, qui, à tout nombre réel x positif ou nul, assoie sa racine carrée $\sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.

Remarques

- $\sqrt{0} = 0$
- Pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $\sqrt{x} \geq 0$

B. Sens de variation de la fonction

Propriété

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est **croissante sur $[0\,;+\infty[$**

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

Démonstration

En seconde, on a vu que la fonction carré est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire que $0 \leq u \leq v \Leftrightarrow u^2 \leq v^2$

Donc si $0 \leq u \leq v$, c'est-à-dire si $\left(\sqrt{u}\right)^2 \leq \left(\sqrt{v}\right)^2$, alors $\sqrt{u} \leq \sqrt{v}$.

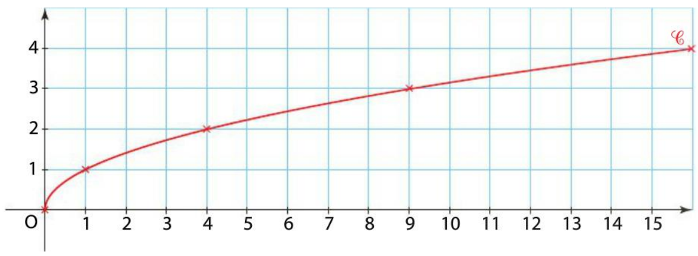
La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Voir exercice résolu 1 p 41

Exercices n°12 à 17 – 24 – 25 – 26 p 46

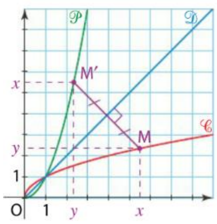
C. Représentation graphique de la fonction

Dans un repère orthogonal, la fonction racine carrée est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous



Propriété

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$ et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$.



Démonstration

x et y désignent des nombres réels positifs.

$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$, c'est-à-dire que le point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, le point $M'(y\,;x)$ appartient à $\mathscr{P}$.

Conséquence

$\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet O. Pour tous nombres réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ **équivaut à** $\boldsymbol{x = y^2}$.

Voir exercice résolu 2 p 41

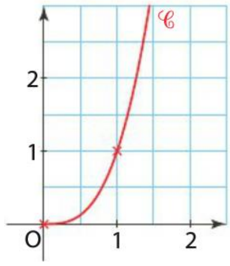
Exercices n°19 à 23 – 27 p 46 – 47

II. La fonction cube

A. Définition

Définition

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui, à tout nombre réel x, assoie son cube x^3 est appelée **fonction cube**.



B. Sens de variation et courbe représentative sur $[0\,;+\infty[$

Propriété

La fonction $x \mapsto x^3$est **croissante sur $[0\,;+\infty[$**

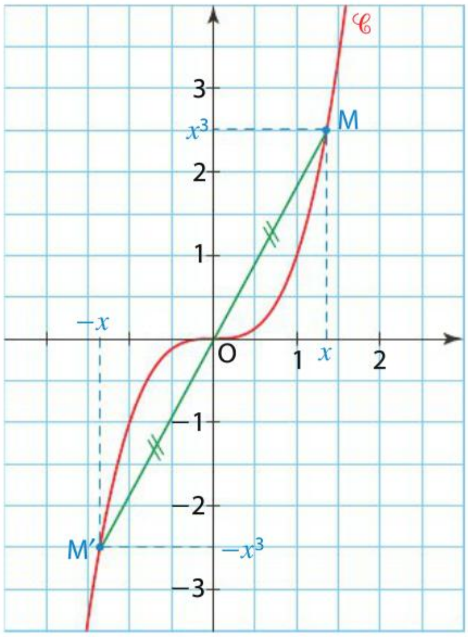
Démonstration

La fonction carré est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire que $u \leq v$ **(1)**alors $u^2 \leq v^2$**(2)**

On multiplie chaque membre de (1) par u^2, on obtient $u^3 \leq u^2 v$. On multiplie chaque membre de (2) par v, on obtient $u^2 v \leq v^3$.

On obtient alors $u^3 \leq u^2 v \leq v^3$. Donc si $0 \leq u \leq v$ alors $u^3 \leq v^3$.

La fonction cube est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.



C. Courbe et tableau de variations sur R

Propriété

Dans un repère orthogonal d'origine O, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction cube est **symétrique par rapport à l'origine O**.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, le point $M(x\,;x^3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

Le symétrique de M par rapport à O est le point $M'(-x;-x^3)$

Or $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ donc M' appartient à $\mathscr{C}$.

Tableau de variations

La symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'origine du repère et le fait que la fonction cube est croissante sur $[0\,;+\infty[$ permettent d'affirmer que la fonction cube est croissante sur $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

Voir exercices résolus 1 – 2 p 43

Exercices n°28 à 40 p 47
Problèmes n°50 – 51 – 54 p 51 - 52

DM n°58 – 59 - 60 p 52 – 53

AP n°1 à 11 p 44 – 45
Autonomie n°64 à 73 p 54 – 55

Approfondissement n°76 à 81 p 56 - 57