Vecteurs et droites du plan

Pour reprendre contact n°1 – 2 p 257

I. Colinéarité de deux vecteurs

Activité n°1 p 258

Définition

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété 1

Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Démonstration (voir p 260)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou il existe un réel λ' tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\lambda' u}$

si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y' \end{cases}$ ou il existe un réel λ' tel que $\begin{cases} x' = \lambda' x \\ y' = \lambda' y \end{cases}$

si, et seulement si, les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\vec{u}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de $\vec{v}$ sont proportionnelles

si, et seulement si, $xy' = x'y$ (les produits en croix sont égaux)

si, et seulement si $xy' - x'y = 0$

Propriété 2 (rappels de seconde)

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 3 (rappels de seconde)

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Exercices n°15 – 16 – 17 – 18 – 20 – 21 - 22 p 274 – 275

II. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est vecteur directeur d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété 4 *(conséquence de la définition)*

Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 5

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite d. Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d si, et seulement si, le vecteur $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$.

Démonstration (voir p 262)

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, donc il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

- Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d, alors il existe deux points distincts C et D tels que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
  Les points A, B, C et D sont alignés sur d donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.
- Si $\vec{v}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, alors il existe un point C distinct de A tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Alors $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ donc A, B et C sont alignés, c'est-à-dire que C appartient à la droite d. Donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Propriété caractéristique 6 (propriété qui caractérise)

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Démonstration

C'est une conséquence de la définition d'un vecteur directeur et de la propriété 3.

Propriété 7

Dans le plan muni d'un repère, le vecteur $\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation

$$y = mx + p$$

Démonstration

Les deux points $A(0\,;p)$ et $B(1\,;m+p)$ appartiennent à d, donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Exercices n°24 – 25 – 26 – 27 – 28 p 275

III. Equation cartésienne d'une droite

A. Droite définie par un point et un vecteur directeur

Propriété 8

Toute droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. Cette équation est appelée **équation cartésienne de la droite d**.

Un vecteur directeur de la droite d est le **vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.**

Démonstration (voir p 264) : à connaître

d est la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$

$M(x\,;y)$ appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$ et $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ sont colinéaires.
si, et seulement si, $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$
si, et seulement si, $\beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$

Cette équation est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta\,;b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$ donc $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Exercices n°34 – 35 p 276

B. Ensemble des points M(x ; y) tels que $ax + by + c = 0$

Propriété 9

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est **une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$**

Démonstration (voir p 264)

On note (E) l'ensemble qui a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$

On a (E)$\Leftrightarrow by = -ax - c$

- Si $b \neq 0$, alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{a}$, on obtient une équation de la forme $y = mx + p$ qui est une équation d'une droite sécante à l'axe des ordonnées et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{m}$. Comme $b \neq 0$, un autre vecteur directeur de cette droite est $-b\vec{u}\binom{-b}{a}$
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ puisque $(a;b) \neq (0;0)$ et $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$
  Cette équation est de la forme $x = k$ qui est une équation de droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercices n°29 – 31 – 32 – 33 – 37 – 38 – 41 p 276

C. Position relative de deux droites

Propriété

d et d' sont deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$.

d et d' sont parallèles si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$

Démonstration

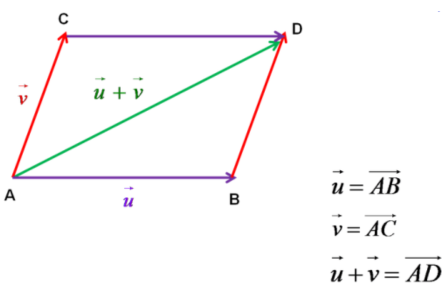
Cette propriété découle de la colinéarité de deux vecteurs.

Exercices n°43 – 45 p 277

IV. Décomposer un vecteur

Propriété 10 : règle du parallélogramme

Soit A, B, C trois points du plan. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Démonstration (voir p 266)

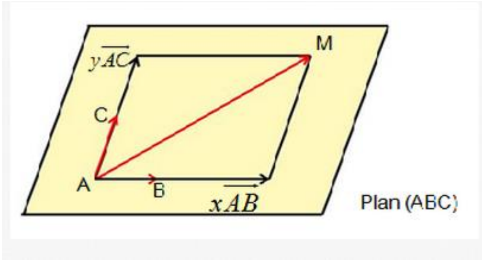
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ car $ABDC$ est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

Par la relation de Chasles, on en déduit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Exercices n°48 – 49 – 50 p 277

Définition – Propriété 11



Soit A, B, C trois points non alignés du plan.

Pour tout point M du plan,

- Il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$
- Ce couple de réels est unique.

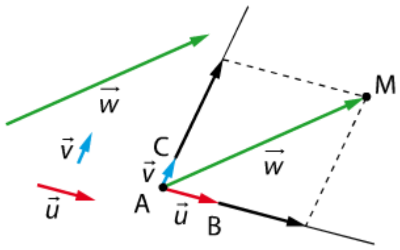
On dit que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan et que $(x\,;y)$ est le couple de coordonnées de M dans ce repère. (ou dans le repère (A, B, C))

Démonstration

TP 2 p 270

Exercice n°51 p 278

Propriété 12



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique coupe de réels $(x\,;y)$ tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Démonstration

Soit A un point du plan et les points $B, C\ et\ M$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$.

On applique la propriété 11 à ces points A, B, C et M et on admet que $(x\,;y)$ ne dépend pas du point A choisi.

Voir exercices résolus n°7 – 8 – 9 – 10 p 267

Exercices n°23 p 275

Exercices n°52 à 63 p 278 - 279

Exercices n°88 – 90 p 282

DM n°92 – 93 p 282 - 283