Puissance n-ième d'une matrice Limite

I. Puissances d'une matrice

(A) Matrices diagonales

Définition 1

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas situés sur sa diagonale principale sont nuls.

Exemple

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Propriété 1

Soit D une matrice diagonale. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n est la matrice diagonale obtenue en élevant à la puissance n les coefficients de D.

Démonstration

Par récurrence immédiate.

Exemple

Si $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

(B) Matrices triangulaires supérieures (ou inférieures)

Définitions 2

Une matrice carrée est dite :

- **triangulaire supérieur (inférieure)** si tous ses éléments situés en dessous (au-dessus) de sa diagonale sont nuls.
- **strictement triangulaire** si elle est triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

A et C sont triangulaires, B et D strictement triangulaires.

Propriété 2

Les puissances d'une matrice triangulaire sont triangulaires de même forme.

Les puissances d'une matrice strictement triangulaire d'ordre n sont nulles à partir de l'exposant n.

Vocabulaire

Une matrice dont une puissance est nulle est appelée **nilpotente**.

Exemple

Pour $n=3$, si $M=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$ avec (a,b,c) réels, $M^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ d'où $M^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n\geq 3$, $M^n=O_3$

Remarque

Ces propriétés permettent de calculer les puissances d'une matrice en décomposant en sommes de matrices particulière ou alors en décomposant par blocs.

1 Calculer la puissance n-ième d'une matrice carrée à l'aide d'une décomposition en matrices diagonales et triangulaires

Énoncé Soit $M=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

1. Écrire M sous la forme D + T, où D est une matrice diagonale et T une matrice strictement triangulaire.

2. Calculer T^2 et exprimer M^2 en fonction de T.

3. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M^n=2^nI+n2^{n-1}T$ où I est la matrice unité d'ordre 3.

Solution

1. $M=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=D+T$ avec $D=2I$, diagonale, et $T=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ strictement triangulaire.

2. T^2 est la matrice nulle O_3. Alors $M^2=(2I+T)(2I+T)=4I+4T$ car $T^2=O_3$ et $IT=TI=T$, $I^2=I$.

3. • L'égalité est vérifiée pour $n=1$.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $M^n=2^nI+n2^{n-1}T$.

Alors $M^{n+1}=M^nM=(2^nI+n2^{n-1}T)(2I+T)=2^{n+1}I+(2^n+n\,2^n)T=2^{n+1}I+(n+1)2^nT$.

• On en déduit que pour tout n, $M^n=2^nI+n2^{n-1}T$. D'où les coefficients de M^n (voir copie d'écran).

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel comme Xcasfr. Après avoir défini la matrice M, la commande matpow(M,n) permet de calculer M^n comme sur la copie d'écran ci-contre.

matpow(M,n)

$$\begin{bmatrix}2^n, & 0, & 2^{n-1}\cdot n\\ 0, & 2^n, & 2^{n-1}\cdot n\\ 0, & 0, & 2^n\end{bmatrix}$$

Voir exercices 4, 5

2 Calculer des produits et des puissances de matrices par blocs

Énoncé Soit $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $M=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&0&1\\0&2&-1&0\\\hline 0&0&5&0\\0&0&0&5\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_2&C\end{array}\right)$.

On admet que l'on peut calculer les produits « par blocs ».

Calculer B et BC puis montrer que $M^2=\left(\begin{array}{c|c}A^2&7B\\\hline O_2&C^2\end{array}\right)$ puis que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M^n=\left(\begin{array}{c|c}A^n&a_nB\\\hline O_2&C^n\end{array}\right)$, où $a_n=\frac{1}{3}(5^n-2^n)$.

Solution

$M^2=\left(\begin{array}{c|c}A^2+BO_2&AB+BC\\\hline O_2A+CO_2&O_2B+C^2\end{array}\right)$. Or $AB=2B$ et $BC=5B$, donc $M^2=\left(\begin{array}{c|c}A^2&7B\\\hline O_2&C^2\end{array}\right)$.

On obtient ensuite M^n par récurrence :

• L'égalité est vraie pour $n=1$.

• Soit $n\geqslant 1$, supposons que $M^n=\left(\begin{array}{c|c}A^n&a_nB\\\hline O_2&C^n\end{array}\right)$ avec $a_n=\frac{1}{3}(5^n-2^n)$.

Alors $M^{n+1}=\left(\begin{array}{c|c}A^n&a_nB\\\hline O_2&C^n\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline O_2&C\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A^{n+1}&A^nB+a_nBC\\\hline O_2&C^{n+1}\end{array}\right)$. Or $A^nB=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2^n\\-2^n&0\end{pmatrix}=2^nB$,

donc $A^nB+a_nBC=2^nB+a_n5B=a_{n+1}B$ avec $a_{n+1}=2^n+5a_n=\frac{1}{3}(5^{n+1}-2^{n+1})$.

• L'égalité est donc démontrée pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où $M^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0&a_n\\0&2^n&-a_n&0\\0&0&5^n&0\\0&0&0&5^n\end{pmatrix}$.

MÉTHODE

On admet que l'on peut calculer des produits « par blocs » comme ci-contre, à condition que les formats des différents blocs permettent les calculs intermédiaires. Cette méthode est intéressante pour des matrices « creuses » c'est-à-dire avec beaucoup de 0.

Voir exercices 10, 11

Exercices nº 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 p 176 - 177

(C) Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 3
Une matrice carrée A est dite diagonalisable s'il existe une matrice carrée P inversible et une matrice carrée D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque

Si $A = PDP^{-1}$, on obtient A^n de manière simple.
En effet, $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Propriété 3 : Cas des matrices carrées d'ordre 2
- Une matrice carrée d'ordre 2 est diagonalisable si, et seulement s'il existe deux réels λ et μ (non nécessairement distincts) et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que AV=λV et AW=μW.
- Si A est diagonalisable, les réels λ et μ sont appelés les **valeurs propres** de la matrice A.

La matrice carrée P=[V W] est inversible et telle que $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$

Démonstration

Si A est diagonalisable, il existe λ et μ réels et $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ inversible tels que $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$

Soit $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$. Comme P est inversible, son déterminant est non nul donc $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

On en déduit que V et W ne sont pas proportionnelles.

On montre alors, en effectuant les calculs que AV=λV et AW=μW.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont telles que AV=-2V et AW=$-$W.

A a pour valeurs propres -2 et -1 et $A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

Prenons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et posons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors AV=$\lambda$V s'écrit

$$\begin{cases} ax + by &= \lambda x \\ cx + dy &= \lambda y \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} (a-\lambda)x + by &= 0 \\ (c-\lambda)x + dy &= 0 \end{cases} \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I_2$. Si $A - \lambda I_2$ est inversible, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc V, qui est nulle, est proportionnelle à toute matrice colonne W.
Pour que A soit diagonalisable, il faut donc que B ne soit pas inversible, donc que soit déterminant soit nul, d'où $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.
Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation $\lambda^2 - 4\lambda + 10 = 0$ n'a pas de solution réelle. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercices nº 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 p 177 - 178

Exercices nº 18 - 19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 p 178 - 180

II. Suites de matrices colonnes : $U_{n+1} = AU_n + B$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n est une matrice colonne à m lignes, A une matrice carrée d'ordre m et B une matrice colonne à m lignes, $m \in \mathbb{N}$. On note (R) la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$.

(A) Expression de U_n en fonction de n

Si l'on sait calculer A^n, on peut chercher à exprimer U_n en fonction de n.

Méthode 1 : avec une suite constante vérifiant la relation (R)

Une suite constante, égale à X, vérifie (R) si, et seulement si, $X = AX + B$.

Si une telle matrice X existe, on a alors $U_{n+1} = AU_n + B$ et $X = AX + B$. Par différence, on obtient $U_{n+1} - X = A(U_n - X)$.

La suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ vérifie donc $V_{n+1} = AV_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On en déduit par récurrence que $V_n = A^n V_0$ puis de $U_n = V_n + X$, on en déduit U_n.

Propriété 4

S'il existe une matrice X telle que $X = AX + B$:

- La suite (V_n) telle que $V_n = U_n - X$ vérifie la relation $V_{n+1} = AV_n$, $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$ d'où $U_n = A^n(U_0 - X) + X$

Méthode 1 : avec une sommation

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = AU_{n-1} + B = A(AU_{n-2} + B) + B = A^2U_{n-2} + (AB + B) = A^2U_{n-2} + (A + I)B$ avec I la matrice identité de même dimension que A. On montre par récurrence :

0.3cm

Propriété 4

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = A^nU_0 + (A^{n-1} + \cdots + A + I)B = A^nU_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)B$.

(B) Limite d'une suite de matrices

Une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L si les coefficients de U_n convergent vers les coefficients de L correspondants.

En pratique, on exprimera U_n en fonction de n par l'une des méthodes précédentes, puis on étudiera la limte des coefficients de U_n

Exemple

Soit $U_n = \begin{pmatrix} 0,5^n \\ 1 - 0,2^n \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 0,2^n = 1$, on dira que la suite (U_n) a pour limite la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercices n° 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 p 180 - 181

Exercices n° 48 - 50 - 51(DM) - 52 - 53 - 54 - 56 - 57(DM) - 58 p 184 - 189